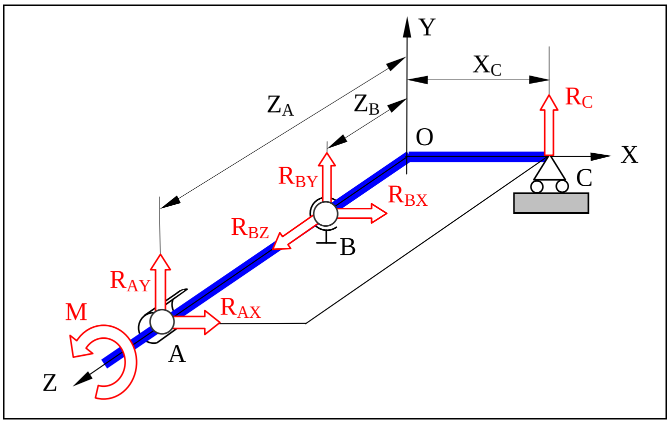
Objectif : Savoir utiliser le formalisme mathématique afin de résoudre méthodiquement un problème de statique.

Considérons le solide ABOC ci-contre :

Ce solide est soumis à un couple $\vec{M}$, d'axe $O\vec{Z}$. Son équilibre statique est assuré par les liaisons suivantes :

- A : linéaire annulaire
- B : rotule
- C : ponctuelle.

Les inconnues de liaison sont au nombre de 6. Les conditions d'équilibre forment un système de 6 équations ⇒ isostatisme.



Torseurs des actions mécaniques : connu : $\vec{M}\begin{vmatrix}0\\0\\M\end{vmatrix}$, inconnus : $\vec{R}_A\begin{vmatrix}R_{AX}\\R_{AY}\\0\end{vmatrix}$, $\vec{R}_B\begin{vmatrix}R_{BX}\\R_{BY}\\R_{BZ}\end{vmatrix}$, $\vec{R}_C\begin{vmatrix}0\\R_C\\0\end{vmatrix}$.

Equations d'équilibre des forces :

$$\vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{R}_C = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix}R_{AX}\\R_{AY}\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}R_{BX}\\R_{BY}\\R_{BZ}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\R_C\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{ll}R_{AX}+R_{BX}+0=0 & (1)\\ R_{AY}+R_{BY}+R_C=0 & (2)\\ 0+R_{BZ}+0=0 & (3)\end{array}\right.$$

Equations d'équilibre des moments :

$$/O : \vec{M} + (\overrightarrow{OA} \wedge \vec{R}_A) + (\overrightarrow{OB} \wedge \vec{R}_B) + (\overrightarrow{OC} \wedge \vec{R}_C) = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\M\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\Z_A\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}R_{AX}\\R_{AY}\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\Z_B\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}R_{BX}\\R_{BY}\\R_{BZ}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}X_C\\0\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\R_C\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ll}0 - Z_A.R_{AY} - Z_B.R_{BY} + 0 = 0 & (4)\\ 0 + Z_A.R_{AX} + Z_B.R_{BX} + 0 = 0 & (5)\\ M + 0 + 0 + X_C.R_C = 0 & (6)\end{array}\right.$$

Résolution : $A . X = B \Rightarrow X = A^{-1}.B$

$$\begin{bmatrix}1&0&1&0&0&0\\0&1&0&1&0&1\\0&0&0&0&1&0\\0&-Z_A&0&-Z_B&0&0\\Z_A&0&Z_A&0&0&0\\0&0&0&0&0&X_C\end{bmatrix}.\begin{pmatrix}R_{AX}\\R_{AY}\\R_{BX}\\R_{BY}\\R_{BZ}\\R_C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\-M\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}R_{AX}\\R_{AY}\\R_{BX}\\R_{BY}\\R_{BZ}\\R_C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-M.Z_B/(X_C.(Z_A-Z_B))\\0\\M.Z_A/(X_C.(Z_A-Z_B))\\0\\-M/X_C\end{pmatrix}$$

Remarque :

Une mise en forme systématique des calculs se prête à la programmation. Mais sans assistance informatique, elle est souvent trop lourde pour être utilisée. Par ailleurs, elle ne développe pas l'esprit d'analyse. Si l'on doit faire des choix de conception, il faudra prendre du recul et chercher à comprendre comment les conditions d'équilibre sont vérifiées pour faire des choix intelligents.