Objectifs : Définir une équivalence statique entre deux cas de charges.
Savoir appliquer cette équivalence entre une force répartie et une force ponctuelle.

Définition :

Deux cas de charges sont statiquement équivalents, s'ils ont les mêmes éléments de réduction en un point quelconque, c'est-à-dire une même résultante $\vec{R}$ et un même moment résultant $\vec{M}$. Il suffit d'établir cette équivalence en un point O pour qu'elle soit vérifiée en tout autre point O'. En effet, d'après la relation de changement de centre de moment, pour des cas de charges indicés 1 et 2 : $\vec{R}_{O2} = \vec{R}_{O1}$, $\vec{M}_{O2} = \vec{M}_{O1} \Rightarrow \vec{M}_{O'2} = \vec{M}_{O2} + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{R}_{O2} = \vec{M}_{O1} + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{R}_{O1} = \vec{M}_{O'1}$.

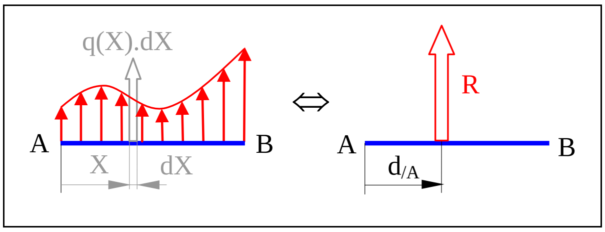
Intérêt :

Lorsque les réactions des liaisons d'un système isolé sont déterminées par les seules conditions d'équilibre statique (cas d'un système isostatique), les réactions produites par un cas de charges pourront être obtenues en remplaçant ce cas de charges par un autre, statiquement équivalent.

Exemple :

Considérons une charge représentée par des forces continûment réparties sur une longueur AB.

Soit q(X) la loi de variation de la force par unité de longueur, avec X la distance entre un point quelconque de AB et l'extrémité A. La force exercée localement sur un élément de longueur dX est q(X).dX. Pour la charge totale, les éléments de réduction en A sont :



une force résultante de module : $R_A = \int_A^B q(X).dX$, un moment de module : $M_A = \int_A^B X.q(X).dX$.

Considérons une autre charge représentée par une force ponctuelle appliquée en un point de AB. Les éléments de réduction de cette charge en A seront identiques à ceux de la charge répartie à condition que son module R soit égal à celui de la résultante $\vec{R}_A$ des forces réparties et que son point d'application soit situé à une distance $d_{/A}$ de A, telle que le moment $R.d_{/A}$ soit égal à M_A.

En particulier :

Répartition uniforme : q(X) = q $\Rightarrow$ $d_{/A} = \dfrac{M_A}{R_A} = \dfrac{\int_A^B X.q(X).dX}{\int_A^B q(X).dX} = \dfrac{q.\left[\dfrac{X^2}{2}\right]_A^B}{q.\overline{AB}} = \dfrac{\dfrac{\overline{AB}^2}{2}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AB}}{2}$.

Remarque :

Le remplacement d'une force répartie par une force ponctuelle, statiquement équivalente, peut être utilisé lorsqu'on isole un solide où une partie seulement du solide, mais dans ce dernier cas, il faudra prendre soin de ne considérer que la force effectivement exercée sur le système isolé :