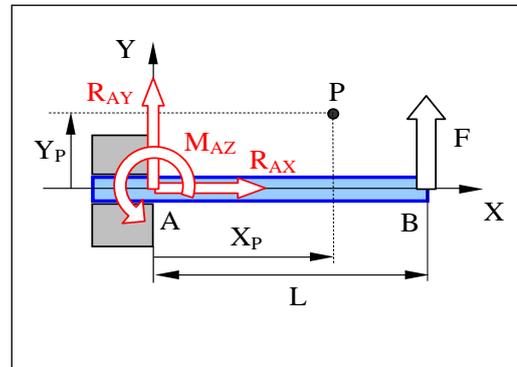


Objectif : Illustrer l'application de la relation de changement de centre de moment à l'étude des conditions d'équilibre d'un solide.

Le schéma ci-contre représente une poutre console (encastrée à une extrémité, libre à l'autre), soumise à un effort de flexion exercé en son extrémité libre :

L'application de l'effort induit une interaction entre la poutre et l'encastrement. Les forces de réaction de l'encastrement maintiennent la poutre en équilibre. Ces forces sont réparties sur des surfaces de contact. Les lois de répartition, surfaciques, sont inconnues. La statique ne permet de déterminer que les éléments de réduction des forces d'encastrement en un point.



On note F le module de la charge de flexion, R<sub>AX</sub> et R<sub>AY</sub> les composantes de la résultante des forces de réaction de l'encastrement et M<sub>AZ</sub> le moment résultant de ces forces en un point A.

*Remarque* : Pour signifier que l'encastrement bloque la rotation de la poutre, le point A est pris en un point de l'encastrement. On donne ainsi un sens physique au moment d'encastrement. Mais en réalité, l'encastrement n'exerce que des forces et le calcul du moment de ces forces en un autre point que A relèvera de l'application de la relation de changement de centre de moment.

Pour étudier les conditions d'équilibre d'un solide, il faut écrire que les forces extérieures qui lui sont appliquées constituent un torseur nul. Il faut donc considérer les éléments de réduction de l'ensemble des forces appliquées à la poutre en un même point. Il serait plus simple ici de conserver le point A (du fait que l'on a déjà considéré les éléments de réduction d'une partie des forces extérieures en ce point), mais pour bien montrer que le choix du centre de moment est arbitraire, on exprimera ici les moments en un point P quelconque, de coordonnées (X<sub>P</sub>, Y<sub>P</sub>).

Éléments de réduction en P de l'ensemble des forces extérieures exercées sur la poutre isolée :

Force résultante :

$$\vec{R} = \vec{R}_A + \vec{F}$$

$$\begin{pmatrix} R_{AX} \\ R_{AY} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix}$$

Moment résultant :

$$\vec{M} = \vec{M}_A + \vec{PA} \wedge \vec{R}_A + \vec{PB} \wedge \vec{F}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{AZ} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -X_P \\ -Y_P \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R_{AX} \\ R_{AY} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L - X_P \\ -Y_P \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{M}_P = \vec{M}_A + \vec{PA} \wedge \vec{R}_A}$$

Moment en P des forces exercées par l'encastrement :  
relation de changement de centre de moment : A → P.

Conditions d'équilibre statique :

Torseur nul ⇒ 
$$\begin{cases} R_{AX} = 0 \\ R_{AY} + F = 0 \\ (M_{AZ} - X_P \cdot R_{AY} + Y_P \cdot R_{AX}) + (L - X_P) \cdot F = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_{AX} = 0 \\ R_{AY} = -F \\ M_{AZ} = -FL \end{cases}$$

*Remarque* : Quel que soit le centre de moment considéré, on parviendra aux mêmes résultats. Mais selon le point choisi, les calculs nécessaires à la résolution seront plus ou moins lourds.