Objectifs : Définir les éléments de réduction d'un torseur.
Démontrer et illustrer la relation de changement de centre de moment.

Définitions :

On appelle torseur un ensemble de forces que l'on caractérise par ses éléments de réduction en un point. Soit $\vec{F}_i$, $i \in [1, n]$ des forces appliquées en des points A_i et O un point quelconque. Les éléments de réduction des forces $\vec{F}_i$ en O sont par définition :

une force résultante : $\boxed{\vec{R}_O = \sum_i \vec{F}_i}$, un moment résultant : $\boxed{\vec{M}_O = \sum_i \overrightarrow{OA_i} \wedge \vec{F}_i}$.

Le moment résultant dépend du point O choisi pour le calcul. La résultante en est indépendante. Le point O est appelé le *centre de moment*.

Relation de changement de centre de moment :

Le moment résultant en un point O' peut être exprimé en fonction des éléments de réduction du torseur en un autre point O. La démonstration est la suivante :

$$\vec{M}_{O'} = \sum_i \overrightarrow{O'A_i} \wedge \vec{F}_i = \sum_i (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA_i}) \wedge \vec{F}_i = \overrightarrow{O'O} \wedge \sum_i \vec{F}_i + \sum_i \overrightarrow{OA_i} \wedge \vec{F}_i .$$

On obtient ainsi la relation de changement de centre de moment : $\boxed{\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{R}_O}$

Torseurs particuliers :

- *Couple* : $\vec{R}_O = \vec{0} \Rightarrow \vec{M}_{O'} = \vec{M}_O$, $\forall$ (O, O').
  Le moment résultant d'un ensemble de forces de résultante nulle est identique en tous points.

  Remarque : on peut interpréter la relation de changement de centre de moment en considérant que les éléments de réduction en un point O sont équivalents à une force $\vec{R}_O$ exercée en ce point et à un couple $\vec{M}_O$. Lorsque le moment résultant est calculé par rapport à un autre point O', on retrouve le couple $\vec{M}_O$ en cet autre point, auquel on ajoute le moment de la force $\vec{R}_O$.

- *Torseur nul* : $\vec{R}_O = \vec{0}$ et $\vec{M}_O = \vec{0} \Rightarrow \vec{M}_{O'} = \vec{0}$, $\forall$ O'.
  Lorsque la résultante et le moment résultant sont nuls en un point, ils sont nuls en tous points.

Exemple d'application : Etude des conditions d'équilibre d'un solide isolé

- $\vec{R}_A$, $\vec{M}_A$: éléments de réduction en A des forces exercées sur le solide, par la liaison encastrement.
- Condition d'équilibre statique : torseur des forces extérieures exercées sur le solide AB = torseur nul.
- A vérifier en un seul point P, choisi arbitrairement.
- Calcul du moment créé en P par les forces exercées par la liaison encastrement en A $\Rightarrow$ utilisation de la relation de changement de centre de moment A$\rightarrow$P.
- D'où les équations d'équilibre statique à résoudre :
  $\vec{R}_A + \vec{F} = \vec{0}$ et $(\vec{M}_A + \overrightarrow{PA} \wedge \vec{R}_A) + \overrightarrow{PB} \wedge \vec{F} = \vec{0}$.